時空理論／単相の世界＋2

（電磁場の方程式）

渡辺 満 （静岡県）

§０ はじめに

次第に、物理学で重要なのは、“各点構造”ではないか？
と思うようになった。

・物理学を学び始めた頃、好きだった、波のホイヘンスの原理
・僕の時空理論の各点座標と単相定理
・各点の $ae^{i\theta}$ が、くるくる回る、シュレーディンガーの波動関数
・よくはわからないが、接バンドルやファイバーバンドル

これらは皆、各点構造と呼べるものを、有している。

北斎画： 波に浮かぶ小船が各点座標に対応。

実は、物理学上の方程式の多くは、広域的にではなく、
各点構造として、局所的に成立するもの、なのでは、あるまいか？
古典的な重力場の方程式や電磁場の方程式も、
実は、本来は局所的なものを、知らないうちに、
広域的なものとして扱った、結果なのでは、あるまいか？

§1　電磁場の方程式

これは、前回の　時空理論／単相の世界＋1.pdf　（§2)の、続きである。
前回、得られた重力場の方程式は、

$$-B^{ij}\partial_i\partial_j\eta + B^{ij}\partial_i A_j = \frac{1}{6}\rho_m \quad \cdots(点Pで)$$

であった。
この式において、「質量は A_i を発生しない」 を要請するならば、

$$B^{ij}\partial_i A_j = 0 \quad \cdots(点Pで) \quad ....(1.1)$$

が要請されるだろう。
式(1.1)は、電磁気学において、
“ローレンツ・ゲージ”と呼ばれるものに、一致する。

式(1.1)を、電磁気学のローレンツ・ゲージとして、
展開・反映させるためには、まず、その舞台として、
前回扱った “点Pの広域単相各点慣性座標（$\lambda_P = 1$）” の上で、
Maxwell の方程式が成立する、とすべきだろう。

幸い、Maxwell の方程式には、G_{ij} や λB_{ij} の λ に当たるものがなく、

元々、各点慣性座標上の方程式に見える。

●4元電磁気学によれば、Maxwell の方程式は、4元的に次のように書ける。

$$\partial_j f^{ij} = J^i \quad ....(1.3)$$

ここで、

$$f_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad , \quad f^{ij} = B^{ik}B^{jl}f_{kl} \qquad (i, j, k, l = 1,2,3,4)$$

J^i は、4元電流密度である。
4元電磁気学において、ローレンツ・ゲージの要請は、
これから示す計算からも、わかるように、
数学的に整った良い結果をもたらし、好ましいものである。

●　以下に、Maxwell の方程式(1.3)に、ローレンツ・ゲージ式(1.1)を施すと、
どうなるか、その計算を示す。
これは、4元電磁気学で、よく知られた計算である。

（$B^{11}=B^{22}=B^{33}=-1$ ，$B^{44}=1$ ，他は 0）

$$\partial_j f^{ij}=\partial_j\{B^{ik}B^{jl}(\partial_k A_l-\partial_l A_k)\}=B^{ik}B^{jl}(\partial_j\partial_k A_l-\partial_j\partial_l A_k)$$

$$=B^{ik}B^{jl}\partial_j\partial_k A_l-B^{ik}B^{jl}\partial_j\partial_l A_k=B^{ik}\partial_k(B^{jl}\partial_j A_l)-B^{ik}B^{jl}\partial_j\partial_l A_k$$

となるが、ここに　$B^{ij}\partial_i A_j=0$　を用いると、

$$\partial_j f^{ij}=-B^{ik}B^{jl}\partial_j\partial_l A_k=-B^{jl}\partial_j\partial_l(B^{ik}A_k)$$

となり、方程式(1.3)は、

$$-B^{jl}\partial_j\partial_l A^i=J^i \quad , \quad A^i=B^{ik}A_k \quad \text{・・・（点 P で）} \quad ....(1.5)$$

のようになる。
これは、綺麗な A^i の4つの波動方程式である。$(i=1,2,3,4)$
また、前回の重力場も、η の波動方程式であった。
A^i の方程式は、式(1.1)かつ式(1.5)の 2 つとなる。

●各点座標上で線形
以前、路の理論では、
“自由落下路は、各点座標上で直線” という要請を行った。
今回、場の理論では、重力場、電磁場に対して、
“各点座標上で、線形な波動方程式“ という要請を行った。
“各点座標上で線形“ が共通している。

●古典物理学の場合

λB_{ij} の λ が、比較的に平坦な場合には、各点座標とベース座標は、

近似的に同一視できる。
このとき、各点座標上の方程式を、そのまま、
ベース座標上の方程式と考えて、近似的には正しい。
これが、古典物理学の場合だろう。

（メモ：η は単相座標変換でないと、存続できないが、
A_i の方は共変ベクトルなので、任意の座標変換でも存続できる。
これが、波動の原理か？）

2018 年 1 月発行　V1.0
著者:渡辺　満 , 発行者:渡辺　満