

時空理論／単相の世界＋1

(重力場の方程式)

渡辺 満 (静岡県)

§0 はじめに

これ以降、添え字は、 $(i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3, 4)$

光錘面(計量) G_{ij} が、 λB_{ij} ($\lambda > 0$) の形に書けるとき、この時空を単相時空と呼ぶ。

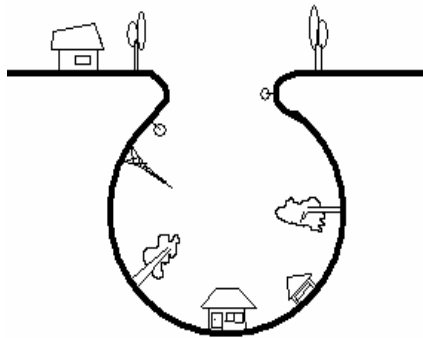
($B_{11} = B_{22} = B_{33} = -1$ 、 $B_{44} = 1$ 、他は 0)

ここでは、単相時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ を対象とする。

時空理論本体・第 4 章「命題 4.2.1」によれば、単相時空では、
光路は常に直線である。

そこから、単相時空は、「曲がっている」というよりは、
むしろ、「伸縮している」というイメージだろう。

伸縮している時空を、脳裏に想像するのは、とても、むずかしいことかも知れないが、
好奇心から、それを、次の SF 話にしてみた。



● 時空の壺

僕は、その公園の周囲を歩いて、外周の距離を測った。

すると、歩数から約 600m であった。

そこで、簡単な計算をして、直径は約 200m と推定した。

さて、今度は中に入って、こちら側から向こう側まで、公園内を横切って歩いた。

しかし、行けども行けども、向こう側にたどり着けない。

ようやく、たどり着いて、歩数から距離を計算すると、

何と、直径は 1km もあった。

上図のように、時空が壺のように、内側が広がっていれば、
このようなことに、なるのかもしれない。

何と言う映画(SF)だったか忘れたが、小さなガラス瓶の中に、
ひとつの銀河系が、そっくりそのまま入っている、というのがあった。
外径は 10cm だが、内径は 10 万光年といったところか。
これは、恐ろしく極端だが、なぜか感心させられた。

リーマン空間では、こういうのもありだ。

● 時空理論本体第 4 章 5 章は、主に路を扱う理論であった。

ここでは、時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ を構成する λB_{ij} や A_i の場を、源泉(ソース)として与えて、

その上で、質点、荷電質点の自由落下路を考えた。

ここでは、幸いにも各点座標と、それによる共変微分という、よいアイデアが得られて、
満足のいく結果が、得られたと思う。

さて、これとは逆に、質量や電流・電荷の分布を、源泉として与え、

そこから、 λB_{ij} や A_i の場を求めることが、必要になるだろう。

1) λB_{ij} A_i → 自由落下路

2) 質量や電流・電荷の分布 → λB_{ij} A_i

1)と 2)で、左右の立場は逆転する。



たぶん、 λB_{ij} は質量から、 A_i は電流・電荷から、作られるとしてよいのだろうが、

この問題は、なかなか手掛かりがなくて、ずっと放置してきた。

物理学者が好んで用いる変分原理は、どうも好きになれない。

なぜかと言うと、たぶん、巧妙な手品のように、種や仕掛けが、見えないからだ。

しかし、そうこうするうちに昨年、幸運にも単相定理が得られ、
そのおかげで、単相時空の舞台は広がって、
その上で、ものを考えることが容易になった。

→ 時空理論／単相の世界.pdf

重力場の方程式については、以前から、たぶん、こうやるのだろう、
という予想は持っていたが、
今回、その確度が高くなってきたのを感じ、それをここに書いた。

§1 質点の自由落下路

ここで、まず、単相時空のどの値が、古典的な重力ポテンシャルに、対応するのかを探る。

時空理論本体 4 章「命題 4.3.1」によれば、質点の自由落下路の方程式は、次式で与えられる。

これは、古典的な Newton の運動方程式に対応している。

$$(-B_{ik}) \frac{d}{d\tau} \{ \exp(2x^0 + 2\eta) V^k \} + \partial_i \eta - A_i = 0 \quad \dots\dots(1.1)$$

$$\dots V^k = \frac{dx^k}{d\tau}, \quad d\tau^2 = \exp(2x^0) \lambda B_{ij} dx^i dx^j, \quad \eta = \log \sqrt{\lambda}$$

ここで、 $d\tau$ は固有時である。

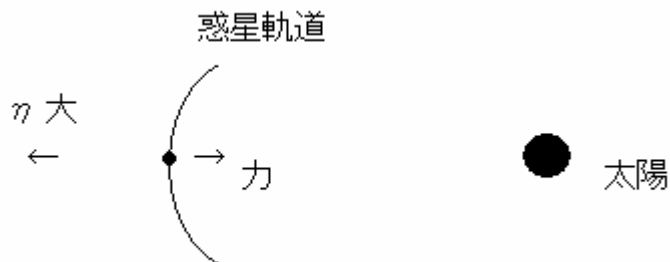
これを見ると、 $A_i - \partial_i \eta$ が古典的な重力場に、 η が古典的な重力ポテンシャルに、対応することが、わかるだろう。

この式で、 $A_i = 0$ の場合を考えると、

$$(-B_{ik}) \frac{d}{d\tau} \{ \exp(2\eta) V^k \} + \partial_i \eta = 0 \quad \dots\dots(1.2)$$

これが、現実の物理的世界に合うためには、 η の分布が、どのようであればよいだろう？

太陽系を模型にして考えてみた。



結果は図のように、 η は、太陽から遠ざかるほど大きくなる、となった。

この結果には、ちょっと驚いた。

それは、 η の大小が、以前抱いていたイメージと、逆だったからだ。

やはり、ちゃんとやらないとだめだ。

時空理論と実際の物理的世界との対応は、まだ、あまりやってないが、最近、Dirac の置換え $p \rightarrow p - qA$ が、

時空理論の第 5 章からも、出ることがわかって、大きな自信を得た。

→ 時空理論/Dirac の置換え.pdf

式(1.2)に、質点の基本質量 m を乗じると、 $m \exp(2\eta)V^k$ が運動量になるが、
本体第 4 章では、この $m \exp(2\eta)$ を効果質量と呼び、
質量の変化を示すものと考えている。

(基本質量とは、例えば、10 円玉の基本質量は、宇宙のどこへ行っても同じである。)

§2 重力場の方程式

さて、 η が重力ポテンシャルであるなら、重力場の方程式として、 η の方程式が得られればよいだろう。

まずは、単相定理を復習しておこう。

単相定理 → 時空理論／単相の世界.pdf

*** 単相定理の復習 ***

単相時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ が、与えられているとき、

任意の点 P に対し、点 P を基点とした、次のような広域的な、新しい単相座標 (x^i) を作るができる。(または存在する)

それを改めて、 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ と書くことにすると、

この新たな単相座標においては、点 P で $A_i - \partial_i \eta = 0$ である。

$(\eta = \log \sqrt{\lambda})$

これによって、点 P では ${}^y \Gamma_{jk}^i = 0$ となる。

すなわち、この新たな単相座標は、点 P で(各)点慣性座標となっている。(簡単に言えば、点 P で平らになっている)

ここまでの、単相定理の説明であるが、さらに、

この座標を1次変換して、点 P で $\lambda = 1$ とすることができるだろう。

このようにしてできた、さらに新たな単相座標を、

点 P の“広域単相各点慣性座標($\lambda_p = 1$)”と呼ぶことにする。

● さて、重力場の方程式を導くわけだが、

最初は簡単に $A_i = 0$ としておこう。

前後するが、次節「§3 曲率について」に書いたように、

4次元計量 $G_{ij} = \lambda B_{ij}$ のスカラー曲率 ${}^G R$ は、次式で与えられる。

$${}^G R = -6\lambda^{-1} B^{ij} (\partial_i \partial_j \eta + \partial_i \eta \partial_j \eta) \quad , \quad \eta = \log \sqrt{\lambda} \quad \dots\dots(2.1)$$

$(i, j = 1, 2, 3, 4)$

スカラー曲率は、文字どおりスカラーであり、座標を変えても、値は変わらない。

これに対応する、スカラーな物理量はないかと探せば、

基本質量密度 ρ_m が見つかる。

(電荷は、4 元電流の 1 部であるから、そちらで、)

そこで、重力場の方程式として、 ${}^G R = \rho_m$ を考えてみよう。

$$-6\lambda^{-1} B^{ij} (\partial_i \partial_j \eta + \partial_i \eta \partial_j \eta) = \rho_m \quad \cdots \cdots (2.2)$$

である。

物理学上の多くの方程式は、見た目には、わからないが、
案外、局所的な座標上で、書かれている可能性が大きい。
街では、測量屋さんが、地上の距離や角度を測っている。
そこでは普通に、ピタゴラスの定理が、用いられているだろう。
しかし、地球の球面の影響が現れるほど、広域になると、
もはや、ピタゴラスの定理は使えない。

式(2.2)は、広域的な式である。

そこでこれを、すでに述べた単相定理から得られる、
点 P の局所的な “広域単相各点慣性座標 ($\lambda_p = 1$)” の上で考える。
 $A_i = 0$ から $\partial_i \eta = 0$ となり、また $\lambda_p = 1$ になるから、
式(2.2)は点 P において、

$$-B^{ij} \partial_i \partial_j \eta = \frac{1}{6} \rho_m \quad \cdots \cdots (2.3) \quad (\text{点 P で})$$

と書ける。

これは、点 P でのみ成り立つ式である。

左辺をいちいち書けば、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^3 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^4 \partial x^4} = \frac{1}{6} \rho_m \quad \cdots \cdots (2.4) \quad (\text{点 P で})$$

これでかなり、古典的な重力場の方程式に似てきた。

さらに、 η が時間的に変化しないとすれば、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^3 \partial x^3} = \frac{1}{6} \rho_m \quad (\text{点 P で})$$

すでに見てきたように、古典論とは異なり、

これらは、時空の各点 P において、

点 P に固有な座標上で、点 P でのみに、成り立つ方程式である。

(メモ: $\text{div grad } \eta = m(P)$ なる η は外向き)

●次に、 A_i が存在する場合を考えよう。

次節 § 3で、スカラー曲率 ${}^G R$ を、各点座標 (y_i) のスカラー曲率 ${}^y R$ に、

自然なやり方で拡張した。それは、

$${}^y R = -6\lambda^{-1} B^{ij} (\partial_i D_j + D_i D_j) \quad , \quad D_i = \partial_i \eta - A_i$$

である。($A_i = 0$ とすれば ${}^G R$ に一致する)

新たな方程式は ${}^y R = \rho_m$ となるだろう。

例によって、これを、

点 P の局所的な “広域単相各点慣性座標 ($\lambda_p = 1$)” の上で考えると、

点 P で $A_i - \partial_i \eta = 0$ であるから、

$$-B^{ij} \partial_i (\partial_j \eta - A_j) = \frac{1}{6} \rho_m \quad \cdots (\text{点 P で})$$

となる。展開すると、

$$-B^{ij} \partial_i \partial_j \eta + B^{ij} \partial_i A_j = \frac{1}{6} \rho_m \quad \cdots (\text{点 P で})$$

が得られる。

ここで、「質量が原因で発生する A_i はない」と考えるならば、

$$B^{ij} \partial_i A_j = 0 \quad \cdots (\text{点 P で})$$

が要請されるだろう。

この式は、実に、電磁気学において、ローレンツ・ゲージを表す式である。

ここに、ローレンツ・ゲージが現れたことは、

電磁場の方程式を考える上で、ヒントとなり、掛け橋となる。

§3 曲率について

リーマン空間論によれば、計量 G_{ij} の曲率 ${}^G R_{ij}$ は、次式で与えられる。

$${}^G R_{ij} = \partial_h {}^G \Gamma_{ji}^h - \partial_j {}^G \Gamma_{hi}^h + {}^G \Gamma_{hp}^h {}^G \Gamma_{ji}^p - {}^G \Gamma_{jp}^h {}^G \Gamma_{hi}^p \quad \dots(3.1)$$

これを用いて、スカラー曲率 ${}^G R$ は、

$${}^G R = G^{ij} {}^G R_{ij} \quad \dots(3.2)$$

で与えられる。

特に、単相の場合 $G_{ij} = \lambda B_{ij}$ には、

時空理論本体 6b 章「命題 6.10.4」を参考にすなりして、

$$\eta = \log \sqrt{\lambda} \quad \text{として、}$$

$${}^G \Gamma_{jk}^i = \delta_j^i C_k + \delta_k^i C_j - B^{ip} C_p B_{jk} \quad , \quad C_i = \partial_i \eta \quad \dots(3.3)$$

となるが、これによって、

$${}^G R_{ij} = -2\partial_i C_j + 2C_i C_j - 2B^{kl} C_k C_l B_{ij} - B^{kl} \partial_k C_l B_{ij} \quad \dots(3.4)$$

となる。

この式から、スカラー曲率を計算すると、

$${}^G R = -6\lambda^{-1} B^{ij} (\partial_i C_j + C_i C_j) \quad \dots(3.5)$$

が得られる。

上記スカラー曲率の計算を確認しておこう。

$${}^G R = \lambda^{-1} B^{ij} (-2\partial_i C_j + 2C_i C_j - 2B^{kl} C_k C_l B_{ij} - B^{kl} \partial_k C_l B_{ij})$$

において、右辺後半の 2 項を計算してみよう。

$$B^{ij} B_{ij} = \delta_i^i = 4 \quad \text{だから、}$$

$$\lambda^{-1} B^{ij} (-2B^{kl} C_k C_l B_{ij} - B^{kl} \partial_k C_l B_{ij}) = \lambda^{-1} 4(-2B^{kl} C_k C_l - B^{kl} \partial_k C_l)$$

$$= \lambda^{-1} B^{ij} (-4\partial_i C_j - 8C_i C_j)$$

●次に、各点座標(y_i)の曲率を定義し、それを計算してみよう。

式(3.1)の ${}^G\Gamma_{jk}^i$ を ${}^y\Gamma_{jk}^i$ で置き換えて、

$${}^yR_{ij} = \partial_h {}^y\Gamma_{ji}^h - \partial_j {}^y\Gamma_{hi}^h + {}^y\Gamma_{hp}^h {}^y\Gamma_{ji}^p - {}^y\Gamma_{jp}^h {}^y\Gamma_{hi}^p \quad \dots(3.6)$$

とするのが、自然な定義だろう。

スカラー曲率の方も、同じようにして、

$${}^yR = G^{ij} {}^yR_{ij} \quad \dots(3.7)$$

と定義できる。

単相の場合 $G_{ij} = \lambda B_{ij}$ には、

$${}^y\Gamma_{jk}^i = {}^G\Gamma_{jk}^i - (\delta_j^i A_k + \delta_k^i A_j - B^{ip} A_p B_{jk}) \quad \dots(3.8) \text{ 時空理論本体 3 章}$$

に、式(3.3) ${}^G\Gamma_{jk}^i$ を代入することで、

$${}^y\Gamma_{jk}^i = \delta_j^i D_k + \delta_k^i D_j - B^{ip} D_p B_{jk} \quad , \quad D_i = \partial_i \eta - A_i \quad \dots(3.9)$$

が得られる。

この式は式(3.3)と、まったく同じ形をしているから、

計量 G_{ij} の場合と、まったく同じ計算が成り立ち、

$${}^yR_{ij} = -2\partial_i D_j + 2D_i D_j - 2B^{kl} D_k D_l B_{ij} - B^{kl} \partial_k D_l B_{ij} \quad \dots(3.10)$$

が得られる。

これより、スカラー曲率は、

$${}^yR = -6\lambda^{-1} B^{ij} (\partial_i D_j + D_i D_j) \quad , \quad D_i = \partial_i \eta - A_i \quad \dots(3.11)$$

となる。

2018年1月発行 V2

著者:渡辺 満, 発行者:渡辺 満

Copyright 渡辺 満 2018年