時　空　理　論

（重力と電磁気の統合）

渡辺 満 著

$$G_{ij} \to \lambda G_{ij} \quad , \quad A_i \to A_i + \partial_i \eta \quad , \quad \eta = \log \sqrt{\lambda}$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + {}^y\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

$${}^y\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^k}$$

$$h_{\lambda\mu} = \exp(2x^0) G_{\lambda\mu} + A_\lambda A_\mu \qquad (G_{\lambda 0} = G_{0\lambda} = 0)$$

$${}^y\Gamma^i_{jk} = {}^G\Gamma^i_{jk} - (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j - G^{il} A_l G_{jk})$$

$$\frac{d}{d\tau}(\alpha v^i) + B^{il}(A_l - \partial_l \eta) = 0 \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

$${}^w\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^h\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - h^{\lambda\alpha}(A_\mu g_{\nu\alpha} + A_\nu g_{\mu\alpha} - A_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (3.1)$$

$${}^w\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}(f_{\mu\alpha} A_\nu + f_{\nu\alpha} A_\mu) \quad (3.2)$$

０．まえがき

時空理論は、物理学というより、むしろ数学である。一般的に正しいと認められる事項を公理として、そこから演繹的に結果を導く、言うならば、数学の定理である。

時空理論では、一人の母親より、二人の子供が生まれる。それは、重力と電磁気である。

Einstein の一般相対論は、重力の数学的表現として、唐突に計量を導入するが、そこには飛躍が感じられる。重力と計量は、ウサギとカメほども、違って見えるだろう。

重力の本質を、もっとも適確に表しているのは、物理学で言う局所慣性系である。従って、この局所慣性系を数学化した’局所慣性座標’によって、重力を表現するのが、最良の方法である。（本文では、局所慣性座標を’各点慣性座標’と呼んでいる）時空理論は、この方法で、斬新な重力理論を展開する。

時空理論では、すべてがテンソル的であり、その上に、各点慣性座標から生じた接続係数が活躍する。最初に定義があって、後に、導かれた命題が並ぶ。

時空理論は、この各点慣性座標の他に、もうひとつ基本的な要素として、光錐面（光円錐とも言う）を導入する。光錐面は、物理学には必要不可欠の存在であり、それは時空理論においても同様である。

誰かが、まったくの白紙の上に、（マクロ的な）時空を描こうとするならば、たぶん、局所慣性座標と光錐面の２つを、まず最初に導入せざるを得ないだろう。それほど、この２つは基本的な概念である。

理論は、この２つを基本的な構成要素として、その上に、光路や質点の自由落下路を定義する。面白いことに、その過程で、あるベクトルが出現する。それが、電磁気のベクトルポテンシャルである。

時空理論は、時空の数学的模型である。これが、現実の物理的世界に正しく対応するかどうかは、今後随時、検証していく必要があるだろう。しかし、まず、矛盾のない数学的模型が必要であった。

時空理論は、ユークリッド幾何学のような、理路整然とした建造物である。僕は、芸術家のようにコツコツと、その建設を行った。１９９７年頃から始めて、大体の骨格ができたのが、２００５年頃。まだ第６章が未完成なため、これを書いている今でも続いている。

神は、人に宇宙の扉を開ける鍵として数学を与えた。労を厭わなければ、人は数学を使って、神の創造の一部を知ることができる。しかしそれは、延々と続く長い螺旋階段のような道のりだ。ちょうど、人が衣食住のために、毎日せっせと働かねばならないのに似て、神は人に労を求め、その報酬として創造の一部を教えてくれる。

この世のものは、すべて形を持っている。すべての意味は形という衣を着ている。人は意味を知るために、形を求めなければならない。それが数学である。

２０１１年　　渡辺　満

目　次

(第６章には、まだ未確定要素があるため、今後、項目の変更が生じるかもしれません。)

解　説

解説：第１章

ここでは、第２章以降で必要とする数学を列挙している。この章のすべてをマスターしなければ、先に進めないというものではない。ざっと目を通して先へ進み、必要に応じて戻ってくる、というのでよいと思う。とりあえず、第２章で必要とするのは、’各点座標と接続係数’あたりである。

著者は、どんな小さなことでも証明しないと、気がすまない性質なので、必要なことはすべて命題の形で述べて、証明を付けた。そのよい所は、この本だけで閉じた世界になることである。しかし、基本的な数学力は前提とするが。

本書で用いるのは、主にテンソルであるから、テンソルに慣れているのが望ましい。テンソルについては、 $Einstein$ 記法を用いるが、そういうことを知っていなくてはならない。例えば、

$$A_i v^i = A_1 v^1 + A_2 v^2 + A_3 v^3 + A_4 v^4$$

しかし、そのつどマスターして行けば、どうにかなるという人もいる。必要なのは知識ではなく、知恵である。ただ、微分や偏微分に精通していなくては、お手上げだろう。

証明は、いちいち追わなくてもよいかもしれないが、その命題の言わんとすることを、理解する必要がある。何よりも概念をよく理解し、意味をつかむことである。

この本では、３次元, ４次元, ５次元を扱うので、添え字の使い方について、 $a, b, ..., h$ は $1, 2, 3$ を、 $i, j, ..., z$ は $1, 2, 3, 4$ を、ギリシヤ文字 $\alpha, \beta, ..., \omega$ は $0, 1, 2, 3, 4$ を表すものと決めている。ただし、第１章については一般次元を扱うので、この限りでない。

この理論で用いる座標は、特に断らない限り一般座標である。例えば N 次元空間であれば、その空間の各点に対して、それを判別する N 個の実数の組 $(x^1, x^2, ..., x^N)$ が連続的に、適当に一意的に、割り付けられているとする。

座標 (x^i) 上に、計量 g_{ij} が与えられているとき、 g_{ij} の $Christoffel$ の記号を ${}^g\Gamma^i_{jk}$ で表す。

$${}^g\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})$$

が定義である。また、 δ^i_j, δ_{ij} を $Kronecker$ のデルタとする。定義は、

$$\delta^i_j, \delta_{ij} \quad = 1 \ \ (i = j) \ \ , \ \ = 0 \ \ (i \neq j)$$

解説：第２章

●４次元時空

時空理論では、４次元空間を出発点にする。我々のこの物理的世界が、（独立した３次元空間＋独立した時間）ではなくて、時間軸を特別としない４次元連続体であるということは、次のような考察によって、ある程度理解できるだろう。

我々の日常生活では、空間は３次元であり、時間はまた、それとは別の存在である。たぶん、これは誰でもそう感じることだろう。しかし、この感じは本当に正しいのか、ということを吟味してみよう。’感じ’は錯覚であることが、往々にしてあるからだ。

「我々は、物を見るという行為によって、３次元の空間概念を作っている」これには、誰も異論はないと思う。しかし、我々の見ている世界が３次元であるかというと、これはすでに違う。衆知のとおり、光速は有限であるから、我々が見ている景色は、実は過去のものである。遠くの景色ほど過去になり、近くの景色ほど現在に近い。この景色は、４次元空間内に円錐形を作り（これを物理学では光錐面，光円錐などという)、これは平らな３次元面にはならない。このように、この段階ですでに３次元を外れ、４次元空間の中にいる。我々の目は、過去と未来を連続的に映像化できないから、４次元に気ずかないだけなのかもしれない。

●固有時

固有時というのは、４次元時空内の路(世界線) に沿って与えられる、ある実数（パラメータ）であり、具体的にいえば、その路に時計を置いたとき、その時計が刻む時間をいう。例えば、惑星探査機の軌道の固有時は、機内に置かれた時計の示す時間である。固有時の値は、定義からわかるように座標とは無関係である。これに対して、座標 x^4 （本によっては x^0 ）を、時間として用いる場合がある。こちらを座標時と呼ぶ。

$Newton$ の世界では、時間と空間が独立しているためか、固有時と座標時の区別がないように見える。

●物体の自由落下路は質量によらない

この命題が、どのような実験で、どの程度正確に確認されているのか、僕は知らないが、たぶん、正確に成り立つのだろうということは、次のような経験や考察によってもわかる。

最近ではテレビなどで、地球軌道上のスペースシャトルや宇宙ステーションの中の映像を、見る機会も多い。そこでは、無重力状態の宇宙飛行士が、目の前にいろんな物を置いて、浮かせたり回転させたりしている。その光景からは、質量の違いによって、自由落下路が異なるようには見えない。

今、自由落下状態にある物体 M と、その中の１部分 $M1$ を考える。もし、自由落下路が物体の質量によって異なるとすると、物体の１部分 $M1$ が、元の物体 M とは、別の路を行きたがるということになる。他の１部分 $M2$ をとれば、また別の路を行きたがる。僕が口を出すのも変であるが、これは創造主にとっては、まことに都合の悪い、まことによろしからぬことである。だから、そんな風にはなっていないと思われる。

●局所慣性座標

地球のまわりの空間には、地球によって形成された重力がある。しかし、よく知られているように、地球軌道上の宇宙船の中は、無重力である。宇宙は、どこに行っても重力場で満ちている。しかし、どの点においても、自由落下系を取れば、重力は見かけ上存在しなくなる。これが、重力の著しい特徴である。（自由落下系を、別の言葉で局所慣性系と呼ぶ）

これが、広い意味の等価原理であり、ここに重力の本質があると、時空理論は考える。そして、これを数学的に表現するために、次の’各点慣性座標’なる概念を考えた。

４次元時空の各点で、ある近傍をとり、その上にある小さな座標を定義し、これを各点慣性座標 (y^i) と呼ぶ。この各点慣性座標が、その点での自由落下系を、局所慣性座標を表すと考える。時空理論では、この各点慣性座標 (y^i) を重力場の数学的表現とする。

各点慣性座標は、マクロ的に見れば、無重力状態の宇宙船の中で、飛行士が自分の周囲に見る自然な座標のことである。

●光錐面

もうひとつ、この理論は光錐面 G_{ij} を必要とする。光錐面というのは、この上で、すでに出てきたが、４次元時空の中で点 P から発せられ

た、光の進行する３次元円錐のことである。それを、時空の各点 P の近傍において考える。点 P から発せられた光の進行方向を v^i とすると、

$$G_{ij}v^iv^j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

となる。光錐面は対称テンソルである。すなわち、

$$G_{ij} = G_{ji}$$

光錐面は、すでに電磁気学の中に現れている。$Maxwell$ の方程式より導かれる磁場の強さ $\mathbf{H}$ についての波動方程式、

$$B^{ij}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^i \partial x^j} = rot\ \mathbf{i}$$

$$B^{11} = B^{22} = B^{33} = -1\ ,\ B^{44} = 1\ ,\ \text{他は} B^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

ここに現れている B^{ij} は、光錐面だろう。このように、光錐面は理論物理学にとっては、必須の存在である。

●光路と質点の自由落下路

このようにして、４次元時空上に’各点慣性座標’と’光錐面’を導入する。この２つの概念を、時空の基本的要素として、これを時空の数学的モデルとし、この上に、新たな物理学を展開するのが、時空理論である。

これらの要素を元に、まず考えられるのが質点の自由落下路だろう。この路は、「各点慣性座標 (y^i) 上では直線である」として定義することができ、その方程式を導くことができる。この方程式は、各点慣性座標 (y^i) のみによって決まり、とりあえずは光錐面 G_{ij} には関係がない。

質点の自由落下路の特別な場合として、光路を定義することができる。光路の場合には、さらに「光路は、常に光錐面に接していなければならない」という条件が付加される。この条件は、各点慣性座標 (y^i) と光錐面 G_{ij} の間に、ある関係を要求する。その関係に、あるベクトル A_i が現れ絡んでくる。果たして、この A_i が、電磁気のベクトルポテンシャルらしいということが、次第にわかってくる。

ここで、質点の自由落下路というと、いかにも古典物理学的で、新しい量子力学的像とは、なじまないように思えるが、しかし、時空理論が数学的な理論体系として、非常にうまくいくことを見ると、量子力学のようなミクロな物理学だけでなく、この時空理論のようなマクロな物理

学の存在が、我々の世界の一員として、許されているように見える。量子力学で、惑星や弾丸の軌道を論ずることは困難だろう。

●ゲージ変換

光錐面 G_{ij} にスカラー λ を乗じた λG_{ij} を考えると、この２つは、実は同じ光錐面を定義することがわかる。そこで、光錐面の交替

$$G_{ij} \rightarrow \lambda G_{ij}$$

をゲージ変換と呼ぶことにする。それは、これが従来からのゲージ変換によく似た結果を生むからである。

さて、この光錐面の交替によって、ベクトル A_i がどう変化するか調べると、

$$A_i \rightarrow A_i + \partial_i \eta \quad , \quad \eta = \log \sqrt{\lambda}$$

となることがわかる。これによって、 A_i が、電磁気のベクトルポテンシャルらしいということがわかった。

●固有時と５次元化

質点の自由落下路と光路の方程式は、

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + {}^y\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

のように書ける。ここで、

$${}^y\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^k}$$

と定義され、これを各点座標 (y ^{i}) による接続係数と呼んでいる。この方程式は、解の曲線 $x^i()$ のみならず、そのパラメータ τ をも特定する。この解となるパラメータ τ を特に、この曲線の正規パラメータと呼んでいる。正規パラメータ τ は、この路（曲線）の固有時に対応すると考えられる。

光錐面 G_{ij} は、これを計量として扱うこともできるので、 ds を計量 G_{ij} による微小な長さとする。我々は、正規パラメータ $d\tau$ と ds の間に、次のような関係を見つけることができる。

$$d\tau^2 = \exp(2\zeta)G_{ij}dx^i dx^j$$

ここで dx^i は路の微小成分、 ζ は、この路に沿って $-A_i$ を線積分した値である。

これを見ると、 $\exp(2\zeta)G_{ij}$ がいかにも計量のように見える。しかし、 ζ は (x^i) の関数ではない。そこで、 ζ を新たな座標 x^0 として、５次元化を行う。$A_0 = 1$ として A_i も５次元化する。

$$x^0(\tau) = \zeta(\tau)$$

であるから、路 $x^i(\tau)$ も５次元化され、 $x^\lambda(\tau)$ と書かれる。このとき、路の方向の微小ベクトル dx^λ に対しては $A_\lambda dx^\lambda = 0$ となる。なぜなら、

$$A_\lambda dx^\lambda = dx^0 + A_i dx^i = d\zeta + A_i dx^i$$

これは、 ζ の定義より 0 である。

さて、これらの５次元化によって、 $Kaluza$ 計量によく似た、次の５次元計量が現れる。

$$h_{\lambda\mu} = \exp(2x^0)G_{\lambda\mu} + A_\lambda A_\mu \qquad (G_{\lambda 0} = G_{0\lambda} = 0)$$

これによって、この路の固有時について、

$$d\tau^2 = h_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$$

と書ける。

● ${}^y\Gamma^i_{jk}$ の５次元化

質点の自由落下路や光路を５次元化したので、それに伴って ${}^y\Gamma^i_{jk}$ の５次元化も必要となる。これは自然な流れで、次のように定義される。

${}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を次のように定義する。

$${}^u\Gamma^i_{jk} = {}^y\Gamma^i_{jk}\ ,\ {}^u\Gamma^0_{jk} = \frac{1}{2}({}^y\nabla_j A_k + {}^y\nabla_k A_j)\ ,\ {}^u\Gamma^\lambda_{\mu 0} = {}^u\Gamma^\lambda_{0\mu} = 0$$

(${}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は x^0 を含まない)

また、 ${}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を次のように定義する。

$${}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + (K^\lambda_\mu A_\nu + K^\lambda_\nu A_\mu)$$

これを使って、５次元化された質点の自由落下路と光路の方程式は、

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + {}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

のようになる。ここで、 K_μ^λ は任意の (1,1) 次テンソルである。

$$A_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

なので、この任意性が生じる。

解説：第３章

●５次元各点座標 (w^λ)

５次元時空 (x^λ) において、ある５次元各点座標 (w^λ) があって、(w^λ) の上では $h_{\lambda\mu}$ が平坦に見えるとするならば、それは意味のある、特別な５次元各点座標といえるだろう。

そのようなものを探してみると、うまい具合に、自然な流れでそれが決まり、その接続係数は

$$^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{h}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - h^{\lambda\alpha}(A_\mu g_{\nu\alpha} + A_\nu g_{\mu\alpha} - A_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (3.1)$$

となる。ここで ${}^{h}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は計量 $h_{\lambda\mu}$ の $Christoffel$ の記号である。

さらに、この ${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ が、第２章の ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ の自然な拡張である ${}^{U}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ に等しいと仮定すると、K_μ^λ がうまく決まり、結局、

$$^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\lambda\alpha}(f_{\mu\alpha}A_\nu + f_{\nu\alpha}A_\mu) \quad (3.2)$$

が得られる。上の式(3.1) と(3.2) より、次の関係が得られる。

$$^{y}\Gamma^i_{jk} = {}^{G}\Gamma^i_{jk} - (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j - G^{il}A_l G_{jk})$$

これによって、 ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ が G_{ij} と A_i によって表現された。ここで ${}^{G}\Gamma^i_{jk}$ は計量 G_{ij} の $Christoffel$ の記号である。この式の右辺は、ゲージ変換によって値が変わらないことが示される。

これらから我々の理論は、４次元座標 (x^i) 上に G_{ij} と A_i を独立に与えて、始めればよいことがわかる。この時空を (x^i, G_{ij}, A_i) のように表記する。

解説：第４章

この章の主な内容は、 $Newton$ 理論に対応する時空モデルの提示である。この時空モデルから、 $Newton$ の運動方程式を精密化したような運動方程式が導かれるが、そこでは、ベクトルポテンシャル A_i が重力場のように振舞っている。

●絶対座標

$Newton$ 力学や電磁気学及び量子力学などでは、ある特別な座標が前提として存在し、暗黙の内に使用されている。$Newton$ 力学では、これを絶対座標と呼んでいる。絶対座標は、その上に成立する様々な物理学（一般相対論を除く）の方程式によって、逆に規定される存在である。しかし、次のような特性を持つとして、よいのではないだろうか。

「絶対座標では、すべての光路が直線に見える」

時空理論としても、これらの一般的な物理学が要請する、この絶対座標を準備する必要があるだろう。次の単相時空は、これに対する解答である。

●単相時空

単相時空というものを次のように定義する（' 単相時空' は、この本での造語である）。時空にある特別な座標が存在して、その座標では光錐面 G_{ij} が、ある実数 λ によって λB_{ij} の形に書けるとき、これを単相時空と呼ぶ。そして、このときの座標を単相座標と呼ぶ。ここで、

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = -1 \ , \ B_{44} = 1 \ , \ \text{他は} B_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

命題 4.2.1 によれば、単相時空ではすべての光路は直線となる。

単相時空での、質点の自由落下路 $x^\lambda(\tau)$ の方程式は、

$$\frac{d}{d\tau}(\alpha v^i) + B^{il}(A_l - \partial_l \eta) = 0 \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

のようになる。ここで、

$$\alpha = \exp(2x^0(\tau) + 2\eta(\tau)) \ , \ \eta = \log\sqrt{\lambda}$$

である。 τ は固有時（正規パラメータ）であり、次のように書ける。

$$d\tau^2 = \alpha B_{ij} dx^i dx^j$$

これは $Newton$ の運動方程式によく似ている。これを見ると、 η は重力ポテンシャルに対応し、A_i が重力場に見える。

この方程式を、古典力学的に書き直してみよう。c を光速度として、時間パラメータを $t = x^4/c$ に書き換えてみると、

$$\frac{dw^a}{dt} = k(\beta \hat{A}_a - \partial_a p) + \frac{k}{c}(\beta \hat{A}_4 - \partial_4 p) w^a \quad (a, b = 1, 2, 3)$$

$$w^a = \frac{dx^a}{dt} \quad , \quad k = 1 - \frac{w^b w^b}{c^2} \quad , \quad p = c^2 \eta$$

ここで、 p は古典的な重力ポテンシャルである。$\hat{A}_i$ は古典的なベクトルポテンシャルで、新しい物理定数 β によって、

$$c^2 A_i = \beta \hat{A}_i$$

の関係で結ばれる。β の次元は、MKSA 単位系で A/kg である。

単相時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ はゲージ変換によって、 $(x^i, B_{ij}, \bar{A}_i)$ の形に変えることができる。ここで、

$$\bar{A}_i = A_i - \partial_i \eta$$

である。この形にすれば、重力場を A_i ひとつで表現することができるが、このとき、「 A_i の数学的回転が電磁気であり、その方向が重力である」という極めて魅惑的な構図ができあがる。

解説：第５章

●荷電質点の路

荷電質点 (m, q) というのは、質量 m 電荷 q を伴った質点という意味とする。ここでは、荷電質点の自由落下路の方程式を考察する。第３章で導出した ${}^w\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ を使った方程式、

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + {}^w\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (5.1)$$

を考える。この方程式の解 $x^\lambda(\tau)$ について、

$$\kappa = A_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

と置くと、

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = 0$$

となっている。

方程式 (5.1) は、質点の自由落下路 $x^\lambda(\tau)$ の方程式になっていて、質点の自由落下路では dx^0 の定義より $\kappa = 0$ となっている。

さて、荷電質点の方程式には、電荷 q が含まれるはずだが、 $q = 0$ とするとき、それは、質点の自由落下路の方程式に一致するだろう。このことから、方程式は質点のそれと同じで、違うのは $dx^0/d\tau$ の方向ではないかと予想できる。$\kappa = q/m$ が期待できるだろう。案の定、方程式 (5.1) からは、古典物理学的にもよさそうな結果が出る。すなわち (5.1) は、荷電質点の方程式でもある。

時空理論　第０章

2010 年５月　 Ver1.1　 発行

著者：渡辺 満 , 発行者：渡辺 満