時空理論・第０章

渡辺　満　（静岡県）

●はじめに

時空理論を始めたのは、
勤めていた会社を辞めた 1997 年の夏、7 月末だった。
すぐに、「各点慣性座標」 を着想したが、
それを展開するために、
しばらく、テンソルを勉強する必要があった。
学生時代に身に付けた、解析学や線形代数を思い起こし、
暑い季節の夜に、汗を流し流し・・・。

高尾山の、あの鬱蒼とした森が好きで、
雨が降らなければ、毎日行った。
山上の茶みせのベンチで、ノートに数式を書いていると、
後ろから、小学生の子が覗き込んで、「それ何語？」、
「数学だよ」。

酒好きなので、帰り道に、しばしば居酒屋に入り、
そこでも、ノートに数式を書くと、
最初のうちは、頭もはっきりしているが、やがて、
何が何だか、わからなくなって、
ノートを閉じて夢想する。

しばらくして、各点座標から共変微分が、
実に、綺麗に出てくることがわかった。
これこそが、数学の醍醐味だ。
思えば、学生の頃から、こういう場面を、追い求めていた。

1999 年 8 の月、「空から恐怖の大王が・・・」
降りては来なかったが、
とうとう、時空ベクトル（電磁ポテンシャル）を、
導くことができた。
その途端に、未知の扉が開いた。

そして、しばらくは、とんとん拍子に進んだ・・・。

突破口を開いたのだから、少しは喜んでも、
よいはずなのだが、少しも喜べない。
先が長いことは、わかっていた。
1つの山に登ると、その向こうに、また、次の山が見えてくる。
すぐに、それに登る準備を始めるので、気持ちに余裕がない。
あそこには、もっと、すばらしいものがある。

会社では、システム・エンジニヤをやっていたから、
複雑で大きなものを、作り上げるのには、慣れていた。
階段は、1 段 1 段、確かめるように登らないと、
怪我をする。
そうこうするうち、2004 年頃には、現在の第 6 章辺りまで、
できた。
2005 年に田舎に戻り、その後も、時空の探索は続いている。
最近の収穫は、単相定理か。

●時空理論の目次

この後に、いくつかの .pdf が続く。

●概要

時空理論は、マクロな時空を正確に記述する、数学である。
この理論では、一人の母親より、二人の子供が生まれる。
それは、重力と電磁気である。

この理論では、‘光錐面’,‘質点’,‘自由落下路’,‘荷電’などの、
物理学上の用語が、いくつか登場するが、
しかし、実質的には数学であり、すべてが数学的に定義され、
すべてが数学的に証明される。

この理論は、公理的な数学のように、
一般的に認められる、いくつかの事項から出発し、
論理的・演繹的に結果を導く。
基本的には、テンソル理論であり、共変微分は、
独自に定義された、自然で理にかなったものが、用いられる。

予備知識として必須なのは、解析学と線形代数ぐらいか。
テンソルの計算は、一見複雑だが、
慣れれば、合理的で気持ちのよい、数学の醍醐味を、
感じることができる。

他書から引用するのは、
多項式の因数分解に関する定理が唯一つ。
その意味で、時空理論は、閉じた世界になっている。

・・・ 第 1 章 ・・・

第 1 章は、時空理論全体で必要になると思われる、
数学的命題を列挙している。
めんどうならば、第 1 章を、すべて読まなくても、
’各点座標と共変微分’の辺りから、第 2 章へ進むことができる。

テンソルの積については、常に Einstein 記法を用いる。
例えば、4 次元の場合ならば、

$$A_i V^i = A_1 V^1 + A_2 V^2 + A_3 V^3 + A_4 V^4$$

$$g_{ij}X^iX^j = g_{1j}X^1X^j + g_{2j}X^2X^j + g_{3j}X^3X^j + g_{4j}X^4X^j$$

$$= g_{11}X^1X^1 + g_{12}X^1X^2 + g_{13}X^1X^3 + g_{14}X^1X^4$$

$$+ g_{21}X^2X^1 + g_{22}X^2X^2 + g_{23}X^2X^3 + g_{24}X^2X^4$$

$$+ g_{31}X^3X^1 + g_{32}X^3X^2 + g_{33}X^3X^3 + g_{34}X^3X^4$$

$$+ g_{41}X^4X^1 + g_{42}X^4X^2 + g_{43}X^4X^3 + g_{44}X^4X^4$$

左辺は、右辺の意味となる。

時空理論では、3 つの次元 （3 次元,4 次元,5 次元） を扱うので、
添え字の使い方について、次のように取り決める。

$a,b,c,...,h$ → 1,2,3 （3 次元）

$i,j,k,...,z$ → 1,2,3,4 （4 次元）

ギリシヤ文字 $\alpha,\beta,\gamma,...,\omega$ → 0,1,2,3,4 （5 次元）

ただし、第1章については、一般次元を扱うので、この限りでない。

時空理論で用いる座標は、特に断らない限り、一般座標である。
すなわち、 N 次元空間であれば、その空間の各点に対して、
それを判別する N 個の実数の組 $(x^1,x^2,...,x^N)$ が、
適当に、一意的連続的に、割り付けられる。

座標 (x^i) 上に、計量 g_{ij} が与えられているとき、

g_{ij} の Christoffel の記号を ${}^g\Gamma^i_{jk}$ で表し、その定義は、

$${}^g\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}\right)$$

である。

また、 δ^i_j, δ_{ij} を Kronecker のデルタとする。 定義は両者とも、

$(i=j)$ のとき =1、 $(i \neq j)$ のとき =0 である。

・・・　第 2 章へ、4次元時空　・・・
時空理論は、4次元空間を出発点にする。
我々が、日常生活で感じるのは、空間は3次元であり、
時間はまた、それとは別の何ものかである。
しかしこれを、もう少し突っ込んでみよう。

我々は、回りに目に見える景色を元に、
頭の中に、3次元空間を作っている。
しかし、光速は有限であるから、
我々が、見ている景色は、実は、すでに過去のものであり、
同一時刻のものではない。
遠くの景色ほど過去になり、近くの景色ほど現在に近い。
この景色は、4次元空間内に円錐形を作り、
物理学では、「光錐面」 または、「光円錐」 などという。

ここで、空間は時間の中に進入し、我々が無意識に描いていた、
平坦な3次元空間は、崩壊する。
結論を言えば、我々は、時空の台座を4次元空間とし、
これを出発点にするべきである。

・・・　固有時　・・・
今、テーブルの上に、時計がある。
この時計は、時を刻み、時刻を教える。
また、地球の裏側のある場所にも、同じ性能の時計が、
置いてあるとしよう。
こちらの時計と、むこうの時計。
この 2 つの時計が、まったく同じ時を刻むかどうかは、
定かではない。
これは、一般的には、異なるとして、始めるのが正しい。
なぜなら、「一致する」は、「異なる」の特別な場合であり、
「異なる」という無限のケースの中の、1 ケースにすぎない。

そうすると、時計は、それが置かれた場所によって、進み方が異なる。
一般的には、そういうことになる。
各場所に、その場所固有の時間がある。

それが、‘固有時’の意味である。

私が、腕にしている時計が刻む時間、
これは、私と共にある固有時である。
あなたが、腕にしている時計が刻む時間、
それは、あなたと共にある固有時である。
では、もし仮に、あなたの腕に、時計がなかったら、どうだろう。
このとき、あなたの固有時は、存在しないだろうか？
いや、そうではない。
あなたの固有時は、時計という機械がなくても、存在するだろう。
時計という装置は、固有時の単なる代替品にすぎない。
では、あなたの固有時は、どこにあるのか？
それは、あなたという物体の中にある。

すなわち、物体は、それ自身が、固有時を刻む時計である。
物体そのものが、時計を有している。
物体という現象の進行速度が、時間であり、
それが、その物体の固有時である。

・・・ 固有時の数学化 ・・・
4次元時空内の物体の路(世界線)に、時計を置いたとき、
その時計の刻む時間が、固有時であるが、
それは、この路上の実数変数τとして、表すことができる。
固有時は、それが置かれた座標とは、無関係なものである。
このτを用いて、路を$x^i(\tau)$と表すことができる。

固有時τを表す具体的な式が、第 2 章で与えられる。
それは、ある計量による距離になる。

$$d\tau^2 = \exp(2\varsigma)G_{ij}dx^i dx^j$$

固有時に対して、一方で、‘座標時’というのがある。
これは、我々の社会が、地球上で用いている時間であり、
地球上のある 1 点での固有時を標準にして、
（確か、グリニッジ天文台）

世界中の時計を、それに合わせる、というものである。
場所によって、日の出が異なるので、シフトして時差を設けている。
Newton の力学や、Maxwell の方程式は、
この座標時で書かれている。

・・・ 質点の自由落下路は、質量によらない ・・・

最近では、テレビなどで、
地球軌道上の宇宙ステーションの中の様子などを、見る機会が多い。
宇宙ステーションの中は、無重力状態で、
そこに置かれた物体は、すべて自由落下状態にある。
宇宙飛行士が、目の前にいろんな物を置いて、
浮かせたり、回転させたり、する様子を見る限り、
質量の違いによって、自由落下路が異なっているようには、
見えない。

ガリレオ以前には、「物体は重いものほど速く落ちる」、
と思われていたらしいが、ガリレオの研究から、
「物体は重さに関係なく、どれも同じ速さで落ちる」 とされた。
いつかどこかで、真空にされたガラス瓶の中で、
鉄球と羽毛が同じ速さで落ちる、実験映像を見たことがある。
これらから、この物理学的命題は、
たぶん、正確に成り立つのだろう。

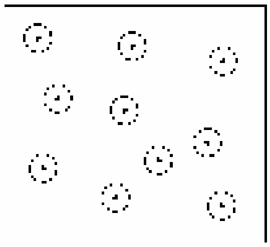
・・・ 局所慣性座標 ・・・

地球のまわりの空間には、地球によって形成された重力がある。
しかし、地球軌道上の宇宙船の中は、無重力状態である。
宇宙は、どこに行っても重力場がある。
しかし、どの点においても、その点の自由落下系を取れば、
その中では、重力は消えてしまう。
これが、重力の著しい特徴であり、
また逆に、重力を条件付けている。

自由落下系は、数学的には、局所慣性座標と呼ばれる。
局所慣性座標は、例えば、宇宙船の中で、

無重力状態の飛行士が、彼の周囲に見ている、
‘自然な座標’のことである。
ここで、‘自然な座標’というのは、地上の測量士がやるように、
光を直線とし、物体製の物差しや分度器で、
距離・角度を測って、作った座標のことである。

時空理論では、局所慣性座標を、数学的に明確にするため、
’各点慣性座標’と言い換える。
4次元時空において、
各点を見ると、そこに、その点を含む小さな近傍が、用意されていて、
その近傍上に座標(y^i)が、定義されている。
この(y^i)を、各点慣性座標と呼ぶ。（i=1,2,3,4）
この各点慣性座標が、4次元時空上の重力を表現する。
各点慣性座標は、重力表現として必要、
かつ、十分なものである。



***　余談　***
当然のことながら、Newton がやったように、
重力を力のベクトルで表現するのは、よろしくない。
なぜなら、自由落下系上で見れば、
重力は、常にゼロになるはずだが、
ベクトルでは、それが、ゼロにならないからである。

$$\overline{F}_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} F_j$$

*****　　******

・・・　光錐面　・・・
我々の物理的世界において、光は、非常に基本的な存在である。
どこに行っても、光の無いところはない。
宇宙は、光に満ちている。

光は電磁波であるから、元は電場と磁場から、できているのだろうが、
それが一端、光になったとき、
静電場や静磁場とは、まったく、別物のように見えるのは、
なぜだろう？
電磁気学を、いくら勉強しても、
光のことが、わかったような気になれない。
その1例として、電磁気学では、光の直進性を、
うまく説明できないだろう。
そこから、光は電磁気学の領域を超えた、
もっと、大きな存在であることを感じる。

光錐面は、4次元空間の中で、光の進行方向を、
表記するためのものである。
物理学の中には、次の形の方程式が、随所に現れる。
例えば、電磁場の波動方程式、クライン・ゴンドン方程式など・・・。

$B^{ij}\partial_i\partial_j a = b$　（$B^{11}=B^{22}=B^{33}=1, B^{44}=-1$，他 $B^{ij}=0$）

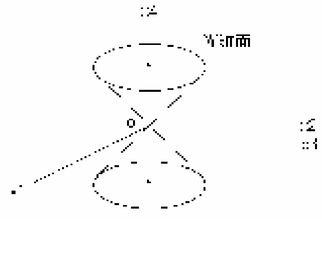
この B^{ij} の逆行列 B_{ij} は、実は光錐面である。

（$B_{11}=B_{22}=B_{33}=1$，$B_{44}=-1$，他 $B_{ij}=0$）

物理学では、光錐面は、必要不可欠な存在である。
時空理論においても、時空の最も基本的な要素として、
光錐面を出発点に置く。（これは 3 次元面である。）

光錐面は、一般座標上では、G_{ij} と書かれ、

$G_{ij}V^iV^j=0$　となる方向 V^i が、光の進む方向となる。



・・・ 光路 ・・・
時空理論では、光路という 1 次元の曲線を扱う。
例えば、レーザービームを発射したとき、
その先端部分が、4 次元時空内に描く路が、光路である。
光点の路と言ってもよい。
そもそも、光というのは、波動であるから、どんな場合にも幅があり、
厳密な意味では、1 次元曲線には、ならないかも知れないが、
光路を数学的に扱うと、理論がうまく展開していくので、
その意味で、理想化された存在‘光路’は、
数学的な要請・表現・模型として必要である。

・・・ 光路と質点の自由落下路 ・・・
光路と質点の自由落下路は、

その路上の各点の局所慣性座標上で、直線となるので、

そう捕らえることで、容易に数学化できる。

光路と質点の自由落下路 $x^i(\tau)$ は、

この路上の各点慣性座標 (y^i) で、

$\dfrac{dy^i}{d\tau}=0$ となる曲線と定義する。

これを、(x^i) に座標変換すれば、光路と自由落下路の方程式が、

得られる。 これは、

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2}+{}^y\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}=0$$

と書かれる。 ここで、

$${}^y\Gamma^i_{jk}=\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j\partial x^k}$$

である。
さて、光路は、各点慣性座標上で直線となるが、
それだけでなく、
さらに、光錐面の上に、ずっと乗っている必要がある。

この条件によって、各点慣性座標 (y^i) と、光錐面 G_{ij} は、

互いに関係付けられることになる。

この関係付けに、時空ベクトル A_i が現れ、
後に、これが電磁ポテンシャルであることが、判明する。
すなわち、この理論は重力だけでなく、
電磁気をも含むことになる。

・・・ ゲージ変換 ・・・
現代物理学では、'ゲージ変換' という言葉をよく見かけるが、
ここでは改めて、ゲージ変換を独自に定義する。

光錐面 G_{ij} に、実数 λ を乗じた λG_{ij} を考えると、

これは、光錐面 G_{ij} に等価な(機能として同じ)光錐面である。

すなわち、光錐面には実数 λ の自由度がある。

光錐面の変換: G_{ij} ---> λG_{ij} をゲージ変換と定義する。

では、この変換によって、

光錐面 G_{ij} から生まれた時空ベクトル A_i は、

どう変換されるだろうか? 計算してみると、

$$A_i \text{--->} \ A_i + \partial_i \log \sqrt{\lambda}$$

となるのである。
これは、電磁気学でよく知られた、
電磁ポテンシャルのゲージ変換である。
すなわち、時空ベクトル A_i とは、実は、電磁ポテンシャルのことだ。
そう理解できる。

・・・ 計量の導出 ・・・
時空理論では、
最初から計量を、天下り的に導入することはしない。
それは、必然性から導かれる。

光錐面 G_{ij} は一見、計量のように見えるが、これは計量ではない。

自由落下路の方程式のパラメーター τ は、

一体何を表すのだろうと、これをτについて解いてみると、

$$d\tau^2 = \exp(2\varsigma) G_{ij} dx^i dx^j$$

が現れる。
ここでςは、次に述べる時空ポテンシャルである。
この右辺が計量となり、これが固有時を表すものと考える。

・・・ 時空ポテンシャルと 5 次元化 ・・・
時空ベクトル$-A_i$(電磁ポテンシャル)を、路に沿って線積分したもの、

$-\int A_i dx^i$ を時空ポテンシャルと呼ぶ。

この時空ポテンシャルを、座標x^0にして、5 次元化を行うと、
新たな展開が現れ、先へ進む道ができる。
5 次元計量とか、5 次元各点座標、荷電質点の路など・・・。

各点慣性座標を 5 次元化する過程で、

${}^y\Gamma^i_{jk}$が具体的に決まる。それは、

$${}^y\Gamma^i_{jk} = {}^G\Gamma^i_{jk} - \left(\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j - G^{il} A_l G_{jk}\right)$$

さらに、5 次元化によって、
荷電質点が扱えるようになり、第 5 章では、
古典的な荷電粒子の運動方程式に、対応するものが得られる。

・・・ 共変微分 ・・・
各点座標を用いると、新しい考え方で、
共変微分を極めて自然に、わかりやすく、定義することができる。
それは、目からウロコである。
現代数学の 1 部に見られる、
あの極端に形式的・抽象的な定義は、
人々を困惑させ、本質的なものを見落とし、
形式に片寄り、実体のないものになる。
数学は、意味・実体を内包する、‘形’でなくてはならない。

各点座標上での微分を、共変微分と定義する。
こうすると、この共変微分では、微分学における‘積の法則’と、
同じ法則が成立し、それにより、計算は嘘のように楽になる。

・・・ 単相時空 ・・・

λB_{ij} の形の光錐面を持つ時空を、‘単純な相’という意味で、

単相時空と呼んでいる。

（$B_{11}=B_{22}=B_{33}=1$，$B_{44}=-1$，他 $B_{ij}=0$）

第 4 章に示すように、単相時空では、光路は直線になり、
また、その自由落下路の方程式は、Newton の運動方程式を、
4 元化したようなものとなる。

$$(-B_{ik})\frac{d}{d\tau}\{\exp(2x^0+2\eta)V^k\}+\partial_i\eta-A_i=0$$

$$\cdots\ V^k=\frac{dx^k}{d\tau}\quad,\quad d\tau^2=\exp(2x^0)\lambda B_{ij}dx^i dx^j\quad,\quad \eta=\log\sqrt{\lambda}$$

ここで、Newton の重力ベクトルに対応するものは、

$$A_i-\partial_i\log\sqrt{\lambda}$$

であり、電磁ポテンシャルが重力ベクトルとして、振舞っている。
僕は、個人的には、希望を含め、
時空は、たぶん、キチッとした単相時空ではないか？
と思っている。

単相時空における大きな数学的成果は、
「単相性を保存する座標変換」 について述べた、
単相定理である。　→ 時空理論／単相の世界.pdf

・・・ 数学であり、物理学である ・・・
時空理論は、数学であり、かつ物理学でもある。
このように、数学と物理学の両側面を持つ理論が、
過去にあったかといえば、

例えば、ユークリッド幾何学があげられる。

有名なピタゴラスの定理は、数学的に証明できるものであるが、
一方で、我々は紙の上に、任意に直角三角形を描いて、
その 3 辺を測定し、実際に、この定理を確かめることができる。
紙は、物体でもあることだし、
その意味では、ピタゴラスの定理は、物理法則のようでもある。

しかし、ピタゴラスの定理は物理現象ではない、と言うだろう。
なぜなら、たぶん、物理現象は、時間的変化を伴うものだからだ。
「風が吹く」 は、物理現象だが、
「街の景色」 は、物理現象とは言わないだろう。

しかし今、視界を 4 次元空間に広げて、
時間もキャンバスに含めてしまえば、
物理現象を、(4 次元的な)景色として、描くことができる。
景色になるということは、幾何学になる、ということだろうから、
物理学は幾何学になる、ということか？

「すべての意味は、形という衣を着ている。
人は意味を知るために、形を求めなければならない。
それが数学である。
数学は、神の言葉である。」

2018 年 11 月発行　V1
著者:渡辺 満 , 発行者:渡辺 満