エネルギー保存則の反例

渡辺 満 （静岡県）

§０ はじめに

　一般の人達や、また物理学者においても、エネルギー保存則が、
まるで神の言葉のように、頭に芯にまで、刷り込まれているように見える。
しかし、エネルギーが保存されなくてこまるのは、古典物理学の世界であって、
相対論的物理学では、エネルギーが保存されなくても、少しもこまらないのだ。

相対論では、エネルギーは単独には保存されずに、‘エネルギー運動量’の形で保存されるという。
「エネルギーは、単独には保存されない」
すなわち、裏を返せば、「エネルギーは保存されない」 ということである。

「本当にそうなら、それを具体的に示して見よ」
そういう声が聞こえてきそうだから、それを用意した。

それは、そんなにむずかしいことではない。
電磁気学に、コイルの相互インダクタンスに関して、‘相反定理’というのがある。
これには、厳密な数学的証明が与えられているが、
しかし、鉄芯等（一般的には強磁性体の芯）の入ったコイルには、
この定理は、成立しないだろう。
なぜなら、鉄芯がある場合には、証明はそのまま適用できないからだ。

相反定理の成立しないコイルでは、エネルギー発生が起きる。
ある回路を例に、それを理論的に示す。

この場合、エネルギー保存則を破る犯人は、鉄の中の磁化電流である。
鉄の中の磁化電流が仕事をすることによって、エネルギーが発生する、と考えられる。
これは、‘磁化電流効果’とでも、呼ぶべきものである。

§１　相互インダクタンスの相反定理

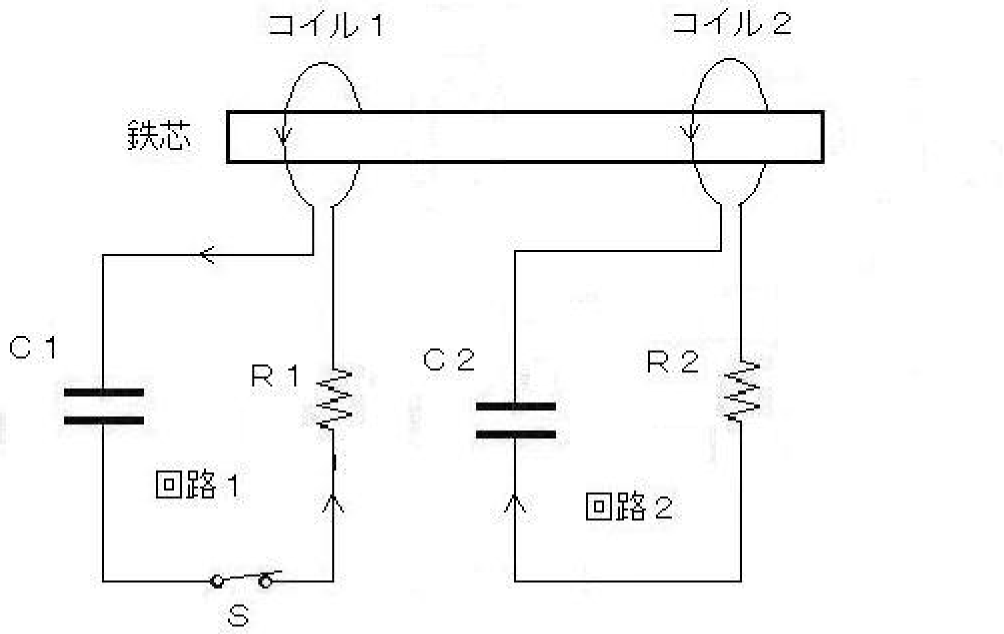
2つのコイルを考え、記号 L_{ij} を次のように定義する。　$L_{ij} > 0$　である。

L_{11} . . . コイル1の自己インダクタンス
L_{12} . . . コイル2がコイル1に与える磁束を表す相互インダクタンス
L_{22} . . . コイル2の自己インダクタンス
L_{21} . . . コイル1がコイル2に与える磁束を表す相互インダクタンス

相反定理というのは、（鉄芯のない）導線のみからなるコイルにおいては、
$L_{12} = L_{21}$　　が成り立つ、というものである。
これには、厳密な数学的証明が与えられている。

さて、鉄芯を入れたコイルでは、もはや、相反定理は成立しないだろう。
すなわち、一般的に　$L_{12} \neq L_{21}$　となるだろう。
次に示すように、この場合には、エネルギー保存則は破れる。

§2 回路例



上図のような回路を考える。

このコイル1，2においては、相反定理は成立しないものとする。

抵抗R1，R2は、回路の導線の抵抗を含むとする。

よく知られているように、この回路の方程式は、次の2つからなる。

$$L_{11}\frac{dI_1}{dt}+L_{12}\frac{dI_2}{dt}+R_1I_1+\overline{C}_1Q_1=0 \qquad (1)$$

$$L_{21}\frac{dI_1}{dt}+L_{22}\frac{dI_2}{dt}+R_2I_2+\overline{C}_2Q_2=0 \qquad (2)$$

ここで　$\overline{C}_i=1/C_i$　としている。

Q_1,Q_2 はコンデンサーC1，C2の電荷、I_1,I_2 は回路1，2に流れる電流である。

この式を、エネルギーを表すものに、変えてみよう。

I_1 を式(1)へ、I_2 を式(2)へ乗じ、　$I_1=\dfrac{dQ_1}{dt}$　，　$I_2=\dfrac{dQ_2}{dt}$　を考慮すれば、

$$L_{11}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_1{}^2\right)+L_{12}\frac{dI_2}{dt}I_1+R_1I_1{}^2+\overline{C}_1\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Q_1{}^2\right)=0 \qquad (3)$$

$$L_{21}\frac{dI_1}{dt}I_2+L_{22}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_2{}^2\right)+R_2I_2{}^2+\overline{C}_2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Q_2{}^2\right)=0 \qquad (4)$$

(3)と(4)を足して、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1{}^2+\frac{1}{2}L_{22}I_2{}^2\right)+L_{12}\frac{dI_2}{dt}I_1+L_{21}\frac{dI_1}{dt}I_2+R_1I_1{}^2+R_2I_2{}^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{C}_1Q_1{}^2+\frac{1}{2}\overline{C}_2Q_2{}^2\right)=0$$

これに、

$$L_{12}I_1\frac{dI_2}{dt}=L_{12}\frac{d}{dt}(I_1I_2)-L_{12}\frac{dI_1}{dt}I_2$$

を使うと、

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(L_{11}I_1{}^2+L_{22}I_2{}^2+2L_{12}I_1I_2+\overline{C}_1Q_1{}^2+\overline{C}_2Q_2{}^2\right)+(L_{21}-L_{12})\frac{dI_1}{dt}I_2+R_1I_1{}^2+R_2I_2{}^2=0$$

(5)

を得る。

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

さて、この回路を次のように動作させてみよう。

最初に、スイッチSを開いておき、外部DC電源よりコンデンサーC1を充電する。

そして、外部DC電源を外した後、スイッチSを閉じる。

すると、電流I_1が流れ、コイル2に生じた誘導起電力によって電流I_2も流れる。

しかし、やがて抵抗の存在でこれらは減衰し、両コンデンサーも空になり、

I_1, I_2は停止する。

動作開始時刻をt_0、動作終了時刻をt_1として、式(5)をt_0からt_1まで積分すると、

$$\frac{1}{2}\left[L_{11}I_1{}^2+L_{22}I_2{}^2+2L_{12}I_1I_2+\overline{C}_1Q_1{}^2+\overline{C}_2Q_2{}^2\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}(L_{21}-L_{12})\frac{dI_1}{dt}I_2dt+\int_{t_0}^{t_1}(R_1I_1{}^2+R_2I_2{}^2)dt=0$$

t_0，t_1ではI_1, I_2の両方とも0、また　t_1ではQ_1, Q_2のどちらも0になっているだろうから、

$$-\frac{1}{2}\overline{C}_1Q_1{}^2(t_0)-\frac{1}{2}\overline{C}_2Q_2{}^2(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}(L_{21}-L_{12})\frac{dI_1}{dt}I_2dt+\int_{t_0}^{t_1}(R_1I_1{}^2+R_2I_2{}^2)dt=0$$

となる。

この式の意味を考えてみる。符合を替えて、

$$\frac{1}{2}\overline{C}_1Q_1{}^2(t_0)+\frac{1}{2}\overline{C}_2Q_2{}^2(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}(L_{21}-L_{12})\frac{dI_1}{dt}I_2dt-\int_{t_0}^{t_1}(R_1I_1{}^2+R_2I_2{}^2)dt=0$$

この式の左辺、
第1項，第2項は、最初にコンデンサーに与えたエネルギーである。
そして第4項は、動作の間に抵抗 R_1, R_2 が消費したエネルギーである。

では、第3項は何かといえば、これがエネルギーの発生（符合によっては消滅）である。
この第3項を、エネルギー発生項と呼ぶ。

鉄芯のない導線のみからなるコイルにおいては、相反定理が成り立ち、
$L_{12} = L_{21}$ より、第3項は0となる。
この場合、コンデンサーに与えられたエネルギーは、
すべて、抵抗 R_1, R_2 によって消費されることになり、式はエネルギー保存則を表すものとなる。

何か特別なことがない限り、エネルギーは保存されるから、
エネルギー保存が出るというのは、この式の妥当性を示すものである。

§３ 磁化電流

前節で、相反定理の成立しないコイルを用いれば、
エネルギーを発生させせることができることを、示した。
しかし、式からは、一体何が仕事をして（何が原因で）、エネルギーが発生するのか、
それは見えて来ない。
わかっているのは、鉄芯のないコイルでは、それは起きないのだから、
少なくとも、鉄芯が原因であることは、間違いない。
では、鉄の何が原因なのだろうか？

鉄は磁化されると、磁場を発生するが、
この磁場は、鉄の中の磁化電流によって、発生するとされている。
物理学では、磁化電流を、次のように定義している。

＊＊＊＊＊　磁化電流とは　＊＊＊＊＊＊＊＊

磁性体中にある電子の角運動量や、スピンによって生じる電流の微小ループを、

磁気双極子と呼ぶ。

磁化とは、この磁気双極子の向きが、１方向にそろうことを言う。

この磁気双極子の分布によって、磁性体中に電流が生じる、この電流を磁化電流という。
磁化電流は、実際の電子の流れではなく、‘電気’の流れである。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

エネルギー発生の原因として、もっとも怪しいのは、この磁化電流だろう。
磁化電流は、通常の（自由電子の流れである）伝導電流とは、
次の点が、明らかに異なっている。

１）通常の電流は電場の作用を受けるが、磁化電流は電子の流れではないため、
電場の作用を受けない。

２）通常の電流に生じるローレンツ力は一切仕事をしないが、
磁化電流に生じるローレンツ力は、仕事をする可能性がある。

今の場合は、この1）による効果だと考えられる。
言葉で、簡単に説明するならば、

「通常の電流では、自由電子が電場からの力を受けるため、電流を流すのに、
仕事 W を必要とする。
しかし、磁化電流は電子の流れではないため、電場からの力は受けない。
従って、この仕事 W を必要としない」

この違いが、結果として、エネルギー発生となる。

子供の頃、鉄釘に導線を巻いて、電磁石を作ったことがあるだろう。
単に導線だけを巻いても、磁力は生じるのだが、鉄釘に巻くことによって、
磁力は比較にならないほど強くなる。
これは、鉄によって磁束密度が増幅されるためである。
ここにも、鉄の不思議さが現れている。

鉄の磁化は、量子論的な現象であって、簡単に理論化するのは無理だろう。
しかし、鉄を磁化電流の集まりと捉えれば、電磁気学の領域に持ちこむことができ、
Maxwell の方程式の対象にできる。
Maxwell の方程式では、この辺りの話は、どのように表現されるだろうか？
次に、それを示してみる。

（付録）に、Maxwell の方程式より導かれる、Poynting の関係式を解説した。
それによれば、電磁気現象においては、時刻 t_0 から t_1 の間で、

$$U(t_1) - U(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \vec{E} \cdot \vec{i} \, dV \right] dt = 0$$

なる関係が成立する。
ここで、$U(t)$ は、時刻 t での、全空間における電磁場のエネルギーを表す。

この式は、電磁場のエネルギー $U(t)$ が、電流のする仕事 $\vec{E} \cdot \vec{i}$ によって、

もたらされることを、表している。

さて、今は磁化電流 $\vec{i}_m$ もこれに含めなければならないから、式は、

$$U(t_1) - U(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \vec{E} \cdot (\vec{i} + \vec{i}_m) \, dV \right] dt = 0$$

となるだろう。

この式内の、項 $\vec{E} \cdot \vec{i}_m$ は、磁化電流のする仕事を表している。

これが、磁化電流を含めたエネルギーの関係式である。

ここで、磁化電流のする仕事 $\vec{E}\cdot\vec{i}_m$ は、実験者には直接触れることのできないものであり、

従って、もし、

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\ \int_V \vec{E}\cdot\vec{i}_m\, dV\ \right]dt$$

が負になれば、エネルギーが発生することになる。
前節のエネルギー発生は、そういうことが起きているのだろう。

（付録） Poyntingの関係式

電磁気学におけるMaxwellの方程式は、電磁気現象を一括して記述する。
Poyntingの関係式は、このMaxwellの方程式より数学的に導かれる。

$$u=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)\quad,\qquad \vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\qquad (1)$$

とするとき、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+div\,\vec{S}+\vec{E}\cdot\vec{i}=0\qquad (2)$$

が Poynting の関係式である。ここでuは電磁場のエネルギー密度、$\vec{S}$は Poynting ベクトルである。
（本書では、ベクトルは頭に矢印を付けて表す）

さて、電流密度$\vec{i}$を包む大きな領域Vを考え、式(2)を積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u\,dV+\int_F \vec{S}\cdot\vec{n}dS+\int_V \vec{E}\cdot\vec{i}\,dV=0\qquad (3)$$

となる。FはVの境界がつくる閉曲面とする。

我々の実験は、短時間内に行われると仮定しよう。
すると、十分にVを大きく取るとすれば、実験中はFの表面で、$\vec{S}=0$ とできる。
（例え、電磁波が発生したとしてもVの境界までは届かない。）
このことを考慮すると式(3)は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u\,dV+\int_V \vec{E}\cdot\vec{i}\,dV=0\qquad (4)$$

となる。さらに式(4)を時刻t_0からt_1まで積分すると、

$$\int_V u(\vec{x},t_1)\,dV-\int_V u(\vec{x},t_0)dV+\int_{t_0}^{t_1}\left[\ \int_V \vec{E}\cdot\vec{i}\ dV\ \right]dt=0\qquad (5)$$

ここで

$$U(t)=\int_V u(\vec{x},t)\,dV\qquad (6)$$

とおけば式(5)は、

$$U(t_1)-U(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\left[\ \int_V \vec{E}\cdot\vec{i}\ dV\ \right]dt=0\qquad (7)$$

となる。
$U(t)$は時刻tでの全空間における電磁場のエネルギーである。
(7)式は、電磁場のエネルギーが電流のする仕事によって、もたらされるものであることを示し、

エネルギー保存則を裏付ける式となっている。
式(7)の $\vec{E}\cdot\vec{i}$ 項は、電流のする仕事を示している。
日常的な言い方をするならば、消費電力とも言えるが、物理学的には電流がエネルギーを消費するだけでなく、電磁場からエネルギーを得る場合もある。

2011年8月 Ver1.0 発行
著者:渡辺 満 , 発行者:渡辺 満